

## 第四章 萬有引力

### 重點內容

### 4-1 萬有引力定律



#### (一) 萬有引力定律(Law of Universal Gravitation) :

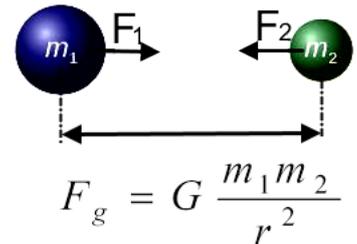
##### A、定義：

(1) 牛頓最早注意到，月球循著近似圓形的軌道繞地球運轉，認為月球必定有朝向地球的加速度，亦同時必有產生此加速度的作用力存在。

(2) 1687 年，牛頓提出萬有引力定律：

宇宙中任何具有質量的物體都會相互吸引，引力的量值與兩物體的質量乘積成正比，和彼此間距離的平方成反比，此關係稱為萬有引力定律。

(3) 星球與物體間的萬有引力，稱為重力(Gravitational force)。



B、關係式： $F = \frac{GMm}{R^2}$

##### C、驗證：

$$\text{由克卜勒週期定律 } \frac{R^3}{T^2} = K_1 \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{R^3}{K_1}$$

$$F = \frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad F = \frac{GMm}{R^2} = m \times 4\pi^2 R \times \left(\frac{K_1}{R^3}\right) = m \times 4\pi^2 \times \left(\frac{K_1}{R^2}\right) = \frac{K_2 m}{R^2}$$

$$\text{依作用力與反作用力定律 } F \text{ 和 } M \text{ 成正比，因此 } F = \frac{K_2 m}{R^2} = \frac{K_3 M}{R^2} \quad \rightarrow \quad F = \frac{GMm}{R^2}$$

##### D、討論：

(1) 萬有引力僅適用於質點，或是均勻的球體。

(2) 均勻球體的萬有引力可視為質量集中於球心(或質心)，因此質點與球體距離由球心算起。

(3) 其他形狀的物體，需以微積分處理，不能從質心算起。



#### (二) 萬有引力定律的應用：

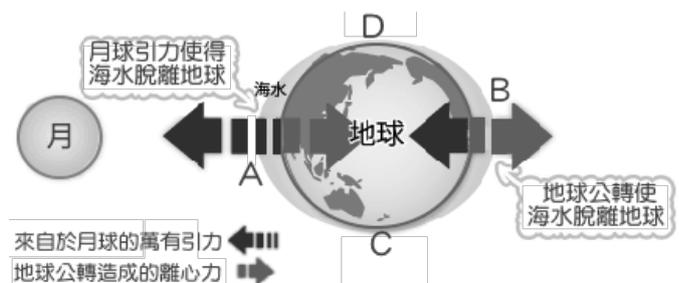
##### A、月球對地球海洋的萬有引力，可解釋潮汐現象：

(1) 地球表面為海水，可自由流動。因此靠近月球的一面，因為月球的萬有引力，而使得海水脫離地球，因此 A 處的水位升高，而 C、D 處的水位降低。

(2) B 處的海水由於地球公轉產生的離心力，使得海水脫離地球，因此 B 處的水位升高。

(3) 由於月球引力及地球公轉離心力的結果，使得地心與月球連線的兩端為漲潮(如圖中 A、B 兩處)，而垂直的兩側則為退潮(如圖中的 C、D 兩處)。

(4) 由於地球自轉每天一圈，因此一天會有兩次漲潮。



B、可驗證得到克卜勒週期定律：

$$F = \frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \rightarrow \quad GMT^2 = 4\pi^2 R^3 \quad \rightarrow \quad \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = K(\text{定值})$$

C、可求得各星球表面的重力場強度  $g$ ：

若星球質量為  $M$ ，且星球的半徑為  $R$

$$F = \frac{GMm}{R^2} = mg \quad \rightarrow \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

D、預測行星軌道，解釋行星不規則的運動——攝動現象(perturbation)：

- (1) 行星除了受太陽的引力外，仍受其他星球引力的作用，故運行的軌道並非平滑的曲線，而在運行的軌跡呈現微小不規則的變化，此現象稱為攝動現象。
- (2) 由於發現星球運行軌跡有攝動現象，因此發現了新行星，例如：天王星、海王星等星球。



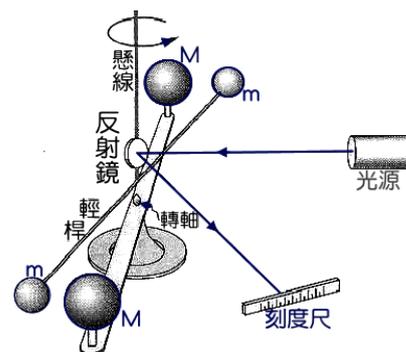
### (三) 引力常數 $G$ 值的測量：

A、牛頓生前並不知道引力常數  $G$  值的大小。

B、1798 年卡文迪西，在實驗室中以扭秤裝置證實兩球體間確實有萬有引力存在，並且得到引力常數  $G$  的數值。

C、測量方法：

- (1) 如圖，兩顆小球  $m$  以細線懸吊，使其扭擺到靜止平衡。
- (2) 兩顆重金屬球  $M$  至於  $m$  旁，與  $m$  距離  $R$ 。
- (3)  $m$  與  $M$  由於引力相吸，使得懸線扭轉小角度  $\Delta\theta_1$ 。
- (4) 移動  $M$  至  $m$  的另一側，仍維持距離  $R$ ，使懸線朝反方向扭轉  $\Delta\theta_2$ 。
- (5) 取  $\Delta\theta_1$  及  $\Delta\theta_2$  的平均值，可減少誤差。



D、實驗結果：

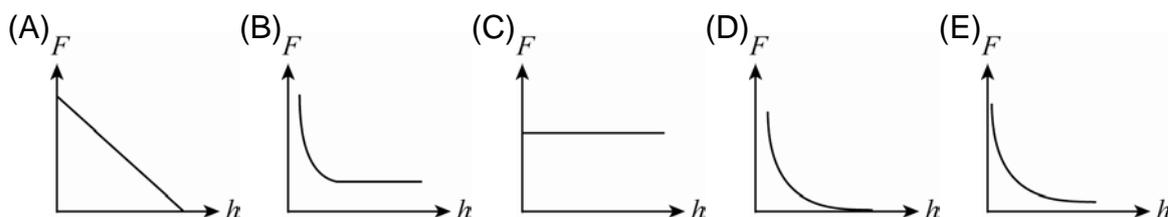
- (1) 測得引力常數  $G$  值  $= 6.74 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ 。
- (2) 此測量值與公認值  $6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$  接近。

### 範例 1

1. 下列哪一個現象與萬有引力無關？

- (A) 蘋果從樹上掉落 (B) 月亮繞著地球轉 (C) 皮球在平地上滾動  
(D) 人造衛星繞著地球轉動 (E) 潮汐現象。

2. 物體離地高度  $h$  與所受重力  $F$  的函數關係應為何者？



【答案】：1.(C)； 2.(E)

**範例 2**

某星球的質量為  $M$ ，星球半徑為  $R$ ，若一艘太空船質量  $m$ ，距離星球表面  $R$ ，則太空船所受引力為何？（假設重力常數為  $G$ ）

- (A)  $\frac{GMm}{R^2}$  (B)  $\frac{GM}{R^2}$  (C)  $\frac{GMm}{2R^2}$  (D)  $\frac{GMm}{4R^2}$  (E)  $\frac{GMm}{2R}$ 。

【答案】：D

**範例 3**

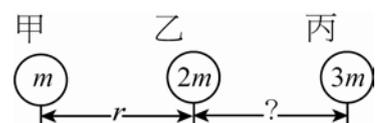
- (1) 霖霖在地面發射火箭，當火箭在上空高度  $h$  處時，萬有引力為在海平面上時的  $1/16$  倍，若地球半徑為  $R$ ，則  $h = ?$   
 (A)  $8R$  (B)  $4R$  (C)  $3R$  (D)  $2R$  (E)  $3R/2$ 。
- (2) 兩質量相同的質點，距離為  $r$  時，兩者間的萬有引力為  $F$ ，若將兩者間的距離縮短為原來的一半，則兩者間的萬有引力變為  
 (A)  $2F$  (B)  $4F$  (C)  $8F$  (D)  $F/2$  (E)  $F/4$ 。
- (3) 某 A 行星距太陽的距離，為地球距太陽的 2 倍，且 A 行星的質量亦為地球質量的 2 倍，則 A 行星所受太陽的引力為地球所受太陽引力的幾倍？  
 (A) 1 (B) 2 (C)  $1/2$  (D)  $1/4$  (E) 4 倍。
- (4) 若編號 M101 與編號 M99 的星球質量分別為  $100M$  與  $M$ ，兩者連心線長度為  $d$ ，一質量  $m$  的彗星穿過兩星球連線中央，則彗星所受萬有引力為何？  
 (A)  $\frac{GMm}{d^2}$  (B)  $4\frac{GMm}{d^2}$  (C)  $50\frac{GMm}{d^2}$  (D)  $396\frac{GMm}{d^2}$  (E)  $104\frac{GMm}{d^2}$

【答案】：(1)C； (2)B； (3)C； (4)D

**範例 4**

有甲、乙、丙三個質點，其質量分別為  $m$ 、 $2m$ 、 $3m$ ，如右圖。若三者間僅受萬有引力，此時乙所受合力恰為零，則乙丙的距離應為何？

- (A)  $2r$  (B)  $r$  (C)  $3r$  (D)  $\sqrt{3}r$  (E)  $r/3$ 。



【答案】：D

**範例 5**

(5) 下列何者為萬有引力常數的單位？

- (A) 牛頓 (B)  $\frac{\text{公斤}^2}{\text{公尺}^2}$  (C)  $\frac{\text{牛頓} \cdot \text{公尺}^2}{\text{公尺}^2}$  (D)  $\frac{\text{牛頓} \cdot \text{公尺}^2}{\text{公尺}^2}$  (E)  $\frac{\text{公尺}^2}{\text{公尺}^2}$ 。

(6) 在銀河系中，星座繞銀河系中心之軌道半徑的立方與週期平方之比為  $k$ ，萬有引力常數為  $G$ ，則銀河系之總質量為若干？

- (A)  $\frac{4\pi^2}{GK}$  (B)  $\frac{4\pi^2 K}{G}$  (C)  $\frac{2\pi K}{G}$  (D)  $\frac{GK}{4\pi^2}$  (E)  $\frac{GK}{2\pi}$ 。

【答案】：(1)D； (2)B

**範例 6**

設地球的半徑為  $R$ ，一火箭由地面垂直升高，當其質量剩餘量為出發時的  $1/2$  時，其重量變為出發時的  $1/8$ ，則此時火箭距離地面的高度為何？

- (A)  $2R$  (B)  $R$  (C)  $\frac{1}{2}R$  (D)  $\frac{1}{4}R$  (E)  $\frac{1}{8}R$ 。

【答案】：B

**範例 7**

假設在太陽系中所有行星軌道皆為圓軌道。今若發現一新行星，地球質量為此行星的 8 倍，地球半徑為此行星的 4 倍，地球繞太陽的平均軌道長度為此行星的 2 倍，則太陽對地球的萬有引力大小為太陽對此行星的若干倍？

- (A)  $1/4$  (B)  $1/2$  (C) 1 (D) 2 (E) 4 倍。

【答案】：D

**範例 8**

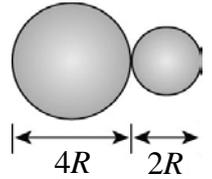
質量  $4m$  與  $m$  的兩質點 AB 相距  $d$ ，今在其連線上置一質量  $2m$  的質點 C，使 C 所受的重力和為 0，則 AC 為

- (A)  $\frac{1}{2}d$  (B)  $\frac{1}{3}d$  (C)  $\frac{2}{3}d$  (D)  $(3-\sqrt{2})d$  (E)  $(2-\sqrt{2})d$ 。

【答案】：C

類1.如右圖，將密度相同且皆均勻分布的兩大、小實心球彼此緊靠。已知小球的質量為  $m$ ，則大、小兩球間的萬有引力為

- (A)  $\frac{Gm^2}{R^2}$  (B)  $\frac{2Gm^2}{3R^2}$  (C)  $\frac{8Gm^2}{9R^2}$  (D)  $\frac{4Gm^2}{9R^2}$  (E)  $\frac{5Gm^2}{27R^2}$ 。



類2.(100 學測) 兩質點間的萬有引力與其質量的乘積成正比，而與其距離的平方成反比。婷婷想從萬有引力常數  $G$ 、地球表面的重力加速度  $g$ 、和地球半徑  $R$  去估算地球的質量  $M$ ，她寫出的正確計算式應為下列何者？

- (A)  $M = \frac{gR^2}{G}$  (B)  $M = \frac{GR^2}{g}$  (C)  $M = \frac{Gg}{R^2}$  (D)  $M = \frac{R^2}{gG}$  (E)  $M = gGR^2$ 。

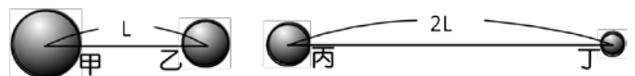
類3.(102 學測) 已知地球的平均半徑約為火星的 1.9 倍，地球的質量約為火星的 9.3 倍。若忽略空氣阻力，而將同一小球以相同的初速度分別於火星表面與地球表面鉛直上拋，則小球在空中運動的時間，在火星上約為地球上的多少倍？

- (A)0.20 (B)0.38 (C)1.0 (D)2.6 (E)4.9。

類4.(103 學測) 一般認為銀河系中心有一個超大質量的黑洞。有些天文學家估計這黑洞的質量大約是太陽的四百萬倍，太陽離此超大質量黑洞的距離約為 28,000 光年。如果太陽、該超大質量黑洞與地球排成一直線，且二者對地球的主要影響只有萬有引力，則這個超大質量黑洞和地球之間的萬有引力，大約是地球和太陽之間萬有引力的多少倍？（28,000 光年大約是  $1.8 \times 10^9$  天文單位）

- (A)  $1.2 \times 10^{-12}$  (B)  $2.5 \times 10^{-7}$  (C)  $2.2 \times 10^{-3}$  (D)  $4 \times 10^6$  (E)  $8.1 \times 10^{11}$ 。

類5.如右圖，甲、乙、丙、丁為四個大小可忽略的鋼珠，其質量比分別為  $m_{\text{甲}} : m_{\text{乙}} : m_{\text{丙}} : m_{\text{丁}} = 8 : 6 : 4 : 3$ 。甲、乙的距離為  $\ell$ ，丙、丁的距離為  $2\ell$ ，則甲、乙之間的萬有引力  $F_{\text{甲乙}}$  與丙、丁之間的萬有引力  $F_{\text{丙丁}}$  之比為何？



- (A)24 : 1 (B)36 : 1 (C)16 : 1 (D)1 : 24 (E)13 : 1。

類6.有兩顆球，甲球質量為乙球質量的 16 倍，而兩者連心線長為  $a$ ，現有蒼蠅恰飛行至此連心線上距甲球中心距離為  $b$  時，兩球對蒼蠅之引力和恰為零，則  $a$  為  $b$  的若干倍？

- (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{3}{4}$  (C)  $\frac{5}{4}$  (D)  $\frac{3}{2}$  (E) 2。

類7.地球半徑為  $R$ ，阿華在地表上重量  $W$ ；坐飛機升至距地表  $0.5R$  的高空中，此時重量減輕

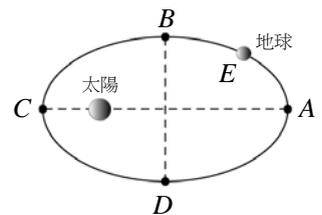
- (A)  $W$  (B)  $\frac{2}{3}W$  (C)  $\frac{4}{9}W$  (D)  $\frac{5}{9}W$  (E)  $\frac{7}{9}W$ 。

類8.兩球的質量均為  $m$ ，相距 1 公尺時，萬有引力量值為  $F$ ；今有另外兩個球質量均為  $3m$ ，相距 2 公尺時，萬有引力量值為何？

- (A)  $9F$  (B)  $3F$  (C)  $\frac{3}{2}F$  (D)  $\frac{9}{4}F$  (E)  $F$ 。

類9.地球公轉太陽的軌道為一橢圓，以太陽為焦點，則地球公轉至圖中哪一個位置所受到太陽引力最小？

- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E。



類10.如右圖， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  為四個大小可忽略的小鋼珠，其質量比為  $A : C = 3 : 2$ ， $B : D = 5 : 1$ ，距離比  $r_{AB} : r_{CD} = 3 : 2$ ，則  $A$ 、 $B$  間與  $C$ 、 $D$  間的重力比  $F_{AB} : F_{CD}$  應為

- (A)  $5 : 1$  (B)  $6 : 5$  (C)  $10 : 9$  (D)  $16 : 9$  (E)  $10 : 3$ 。

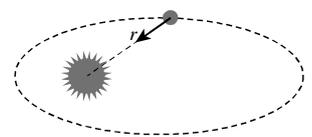


類11.質量為  $m$  的衛星在圓軌道上繞地運行，其離地高度為  $h$ ，且加速度量值為  $a$ 。若地球半徑為  $R$ ，則地球質量為多少？

- (A)  $\frac{ah^2}{G}$  (B)  $\frac{aR^2}{G}$  (C)  $\frac{a(h+R)^2}{G}$  (D)  $\frac{a(h-R)^2}{G}$  (E)  $\frac{aG}{(h+R)^2}$ 。

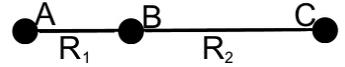
類12.地球以橢圓軌道繞日運動，當地球與太陽之距離為  $r$  時，地球的加速度為  $a$ ，則太陽質量為多少？

- (A)  $\frac{ar^2}{G}$  (B)  $\frac{ar}{G}$  (C)  $\frac{aG}{r^2}$  (D)  $\frac{Gr}{a}$  (E)  $\frac{Gr}{a^2}$ 。



## 綜合練習

【題組】有 A、B、C 三質點，彼此的質量分別為  $2m$ 、 $m$ 、 $3m$ ，而  $R_{AB}=R$ ， $R^{BC}=2R$ ，則：



- \_\_\_\_\_ 1. 若  $F_{AB}$  為 A 吸引 B 的作用力， $F_{BA}$  為 B 吸引 A 的作用力，則  $F_{AB} : F_{BA} = ?$   
 (A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 : 1 (D) 1 : 4 (E) 1 : 1。
- \_\_\_\_\_ 2.  $F_{AB} : F_{BC} : F_{AC} = ?$   
 (A) 12 : 3 : 4 (B) 12 : 9 : 4 (C) 12 : 9 : 8 (D) 24 : 9 : 8 (E) 24 : 9 : 4。
- \_\_\_\_\_ 3. B 受到 A 與 C 的合力為若干?  
 (A)  $\frac{Gm^2}{2R^2}$  (B)  $\frac{3Gm^2}{2R^2}$  (C)  $\frac{3Gm^2}{4R^2}$  (D)  $\frac{Gm^2}{4R^2}$  (E)  $\frac{5Gm^2}{4R^2}$ 。
- \_\_\_\_\_ 4. 實驗室內有兩個銅球，質量皆為 2.0 公斤，球心相距 2.0 公尺，若已知地球質量約為  $6.0 \times 10^{24}$  公斤，而且地球半徑約為 6000 公里，則銅球間的萬有引力和銅球與地球間的萬有引力之比的數量級為若干?  
 (A)  $10^{-10}$  (B)  $10^{-12}$  (C)  $10^{-14}$  (D)  $10^{-16}$  (E)  $10^{-18}$ 。
- \_\_\_\_\_ 5. (100 學測) 兩質點間的萬有引力與其質量的乘積成正比，而與其距離平方成反比。琪琪想從萬有引力常數  $G$ 、地球表面的重力加速度  $g$ ，和地球半徑  $R$ ，去估算地球質量  $M$ ，她寫出的正確計算式應為下列何者?  
 (A)  $M = \frac{gR^2}{G}$  (B)  $M = \frac{GR^2}{g}$  (C)  $M = \frac{gG}{R^2}$  (D)  $M = \frac{R^2}{Gg}$  (E)  $M = gGR^2$ 。
- \_\_\_\_\_ 6. 兩球相距  $d$  時，彼此間的萬有引力為  $F$ ，若將其分開至相距  $3d$ ，則萬有引力變為多少?  
 (A)  $9F$  (B)  $3F$  (C)  $\frac{1}{3}F$  (D)  $\frac{1}{6}F$  (E)  $\frac{1}{9}F$ 。
- \_\_\_\_\_ 7. 在質量比為 4 : 9 的兩遠距離星球連線上，重力加速度為零處，到兩星球的距離比為  
 (A) 2 : 3 (B) 3 : 2 (C) 4 : 9 (D) 9 : 4 (E) 1 : 1。
- \_\_\_\_\_ 8. A 與 B 兩星球的半徑比為 2 : 1，密度比為 1 : 3，則兩者表面之重力加速度比為若干?  
 (A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 9 (D) 9 : 4 (E) 3 : 8。

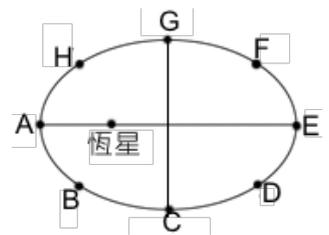
- \_\_\_ 9. 已知地球半徑為  $R$ ，一火箭由地面發射升空，當其剩餘質量為原質量的  $1/3$  時，重量為在地表時地  $1/12$ ，此時火箭距離地面高度為若干？  
(A)  $R/3$  (B)  $R/2$  (C)  $R$  (D)  $3R/2$  (E)  $2R$ 。
- \_\_\_ 10. 某星球的質量為地球質量的  $80$  倍，半徑則為地球的  $10$  倍，今在地球上體重  $50$  公斤重的人，到某星球上體重變為若干公斤重？  
(A)  $500$  (B)  $400$  (C)  $40$  (F)  $50$  (E)  $60$  公斤重。
- \_\_\_ 11. 有甲、乙兩星球皆為均勻的球體，甲星球的質量為乙星球的  $3$  倍，半徑為乙星球的  $2$  倍，則在甲、乙兩星球的表面，其重力加速度的量值比為若干？  
(A)  $3:4$  (B)  $4:3$  (C)  $9:16$  (D)  $16:9$  (E)  $8:9$ 。
- \_\_\_ 12. 婷婷在地表體重  $w$ ，搭乘火箭上升至離地表  $R/2$  的高空， $R$  為地球半徑，則此人的體重變為多少公斤重？  
(A)  $\frac{1}{3}w$  (B)  $\frac{2}{3}w$  (C)  $\frac{2}{9}w$  (D)  $\frac{4}{9}w$  (E)  $\frac{8}{9}w$ 。
- \_\_\_ 13. 某星球因內部發生核融合，導致體積膨脹為原來的  $8$  倍，而質量則維持不變，此時星球表面的重力加速度量值變為原來的多少倍？(球體體積公式  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ )  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{16}$  (D)  $16$  (E)  $4$  倍。
- \_\_\_ 14. 美國太空總署(NASA)欲發射一火箭至月球上，若火箭從地表發射，沿直線路徑到達月球，假設火箭在飛行途中，僅受到地球與月球的萬有引力，則由地球往月球的過程中，火箭受到合力的大小如何變化？  
(A) 先增後減 (B) 先減後增 (C) 一直增加 (D) 一直減少 (E) 始終維持不變。
- \_\_\_ 15. 人造衛星的發射，是將衛星以一定的速度送入預定地軌道中，而衛星的發射場一般是選擇在較靠近赤道附近的位置。選擇此處發射衛星最大的優點，是因為在赤道附近有何特性？  
(A) 地球自轉的角速度較大 (B) 地球自轉的角速度較小 (C) 地球的引力較大  
(D) 地球自轉時的切線速度較大 (E) 地表附近的重力加速度較大。

【題組】美國國家航空暨太空總署發射的「好奇號」火星探測車，於 2012 年 8 月成功降落在火星的隕石坑。火星一直是人類太空探測的重點目標，期望「好奇號」的火星之旅能憑藉先進科學儀器的探索，獲得解答生命疑問的線索。

- \_\_\_\_ 16.(102 學測) 下列關於探測火星的敘述，何者正確？  
 (A)火星與月球一樣是地球的衛星，是目前看來最適合人類移居的星體 (B)火星是太陽系中最鄰近地球且較地球靠近太陽的行星，因此較可能存在生命 (C)火星與地球一樣具有相同的繞日週期，因此有相似的季節變化 (D)火星與地球一樣具有衛星，因此有相似的晝夜變化 (E)火星繞日軌跡為橢圓，公轉一圈的時間大於地球上的一年。
- \_\_\_\_ 17.(102 學測改編) 已知地球的平均半徑約為火星的 2 倍，地球的質量約為火星的 10 倍。若忽略空氣阻力，而將同一小球以相同的初速度分別於火星表面與地球表面鉛直上拋，則小球在空中運動的時間，在火星上約為地球上的多少倍？  
 (A)0.4 (B)2.0 (C)2.5 (D)4.0 (E)5.0 倍。
- \_\_\_\_ 18.承上題，民間組織計畫招募火星志願者於 2023 年登陸火星，並在火星上生活，請問 60kg 的登陸者在火星上的重量為多少公斤重？  
 (A)12 (B)24 (C)36 (D)48 (E)72 公斤重。
- \_\_\_\_ 19.關於地表附近的重力加速度的相關性質，下列各項敘述何者正確？  
 (A)地表各處的重力加速度值都相同 (B)位於赤道地面附近的重力加速度大於北極地面的重力加速度 (C)由南極向北極前進時，重力加速度量值逐漸增加 (D)由地面垂直向天空移動，質量始終不變，重量則漸減 (E)我們定北緯 60 度的海平面上重力加速度值為標準值。

【題組】一行星環繞一恆星的橢圓軌道如右圖，請回答下列問題：

- \_\_\_\_ 20.行星公轉至何處，所受的萬有引力最小？  
 (A)A (B)C (C)E (D)F (E)H。
- \_\_\_\_ 21.行星公轉至哪兩點時所受的萬有引力大小相同？  
 (A)A、E (B)B、D (C)D、F (D)H、F (E)D、H。
- \_\_\_\_ 22.行星公轉至何處，運動的加速度最大？  
 (A)A (B)C (C)E (D)F (E)H。



4-1\_萬有引力\_標準答案：

類題：

1.C 2.A 3.D 4.A 5.C 6.C 7.D 8.D 9.A 10.E 11.C 12.A

一、單一選擇題：

1.E 2.D 3.E 4.B 5.A 6.E 7.A 8.B 9.C 10.C

11.A 12.D 13.B 14.B 15.D 16.E 17.C 18.B 19.D 20.C 21.C 22.A